

მათემატიკა ეკონომიკასა და ბიზნესში 1

(მათემატიკა ეკონომისტებისათვის 1)

ფინალური გამოცდა

(40 ქულა = 16x2,5ქულა)

თეორიული საკითხების ჩამონათვალი

მოთხოვნისა და მიწოდების წრფივი ფუნქციები, წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე; ხარისხები და ლოგარითმები; პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლებები, წრფივი უტოლობები, წრფივი სისტემები, წრფივი ფუნქციები; მატრიცები, მატრიცების ტოლობა, ერთეულოვანი მატრიცა, მარტივათა შეკრება-გამოკლება; მატრიცის რიცხვზე გამრავლება; მატრიცათა ნამრავლი; ტრანსპონირებული მატრიცა. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები; მინორი, ალგებრული დამატება, მიკავშირებული და ტრანსპონირებული მატრიცები; შებრუნებული მატრიცა; წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები და მათი ამოხსნა კრამერის წესით; სარგებლის მარტივი განაკვეთი; სარგებლის რთული განაკვეთი; სარგებლის ნომინალური განაკვეთები; ეკვივალენტური განაკვეთები; ვალის დაფარვის გეგმა, ანუიტეტი, ინვესტიციების შეფასება-შედარება; რიცხვითი მიმდევრობები; რიცხვითი მიმდევრობის მოცემის წესები, მონოტონური მიმდევრობა, შემოსაზღვრული მიმდევრობა; რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი; კრებადი მიმდევრობის თვისებები; ეილერის რიცხვი; უწყვეტი დარიცხვა; რიცხვითი მწკრივი და მისი ჯამი; რიცხვითი მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; შედარების ნიშანი; დალამბერისა და კოშის ნიშნები.

ნ ი მ უ შ ი

1. მოთხოვნა – მიწოდება

- ა) მოთხოვნის წრფივი ფუნქციაა $P = f_D(Q) = aQ + b$, სადაც a და b გარკვეული პარამეტრებია (რიცხვებია). იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ ფასი იცვლება $[0; 120]$ შუალედში, ხოლო მოთხოვნა იცვლება $[0; 20]$ შუალედში.
- პასუხი: -6
- ბ) მიწოდების (არაცხადი სახის) ფუნქციაა $3P - 5Q - 840 = 0$. რამდენი ერთეულით გაიზრდება მიწოდება ფასის 10 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში?
- პასუხი: 6
- გ) ცნობილია, რომ თუ ფასი 90 ერთეულია, მაშინ მოთხოვნა 10 ერთეულია. ფასის 12 ერთეულით გაზრდა იწვევს მოთხოვნის 4 ერთეულით შემცირებას. იპოვეთ ფასი, როცა მოთხოვნა 25 ერთეულია, თუ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.
- პასუხი: 45
- დ) იპოვეთ a რიცხვითი პარამეტრის უდიდესი მთელი მნიშვნელობა, თუ $P = f_S(Q) = (1 + a)(4 - a)Q + (290 - 110a)$ მიწოდების წრფივი ფუნქციაა.
- პასუხი: 2

2. მოთხოვნა – მიწოდება, წონასწორობა

- ა) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -4Q + 120$, ხოლო მიწოდების ფუნქცია $P = 0,5Q + 30$. მთავრობამ დააწესა ფიქსირებული გადასახადი პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. იპოვეთ დაწესებული გადასახადის სიდიდე, თუ ახალი წონასწორობის ფასია 48 დოლარი.
- პასუხი: 9
- ბ) მოთხოვნის (არაცხადი სახის) ფუნქციაა $aP + \frac{1}{9}(8a - 20)Q - 560 = 0$, სადაც a გარკვეული პარამეტრია (რიცხვია). იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ ფასის 4 ერთეულით გაზრდა იწვევს მოთხოვნის 9 ერთეულით შემცირებას.
- პასუხი: 5
- გ) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -5Q + 150$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $P = \frac{1}{2}Q + 40$. იპოვეთ ახალი წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე დაწესდა გადასახადი (ბეგარა) ფასის 10 %-ის ოდენობით.
- პასუხი: 19
- დ) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = aQ + 120$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $P = f_S(Q) = (\frac{1}{2}a^2 + a)Q + 20$. იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ წონასწორობის სიდიდეა 8 ერთეული.
- პასუხი: -5

3. მატრიცები, წრფივი მოქმედებები მატრიცებზე

ა) გამოთვალეთ $a - b$, თუ $\begin{bmatrix} a-4 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 0 & b-8 & 5 \end{bmatrix}$.

პასუხი: 6

ბ) იპოვეთ $C = 4A - 3B^T$ მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტების

ჯამი, თუ $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ და $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$. პასუხი: 16

გ) გამოთვალეთ $3a + 2b$, თუ $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & a \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & b & -4 \end{bmatrix}$ და $A = A^T$. პასუხი: -4

დ) იპოვეთ x და y რიცხვების ჯამი, თუ $\begin{pmatrix} 5x + 11 & 0 \\ 7x + 14 & 6y - 11 \end{pmatrix}$

ერთეულოვანი მატრიცაა.

პასუხი: 0

4. მატრიცების გამრავლება, შებრუნებული მატრიცა

ა) იპოვეთ ჯამი C მატრიცის იმ c_{ij} ელემენტებისა, რომელთათვისაც $i \neq j$,

თუ $C = AB$ და $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. პასუხი: 7

ბ) იპოვეთ $10A^{-1} - A^T$ მატრიცის უდიდესი ელემენტი, თუ $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

პასუხი: 3

გ) იპოვეთ X მატრიცის უმცირესი ელემენტი, თუ

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{პასუხი: } -23$$

დ) იპოვეთ m პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სრულდება

ტოლობა $A^2 = (m + 2)A$, სადაც $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. პასუხი: 1

5. დეტერმინანტი, მინორი, ალგებრული დამატება

ა) იპოვეთ x , თუ $\begin{vmatrix} 2x & -2 & 1 \\ 4 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & x \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - x$. პასუხი: 4

ბ) იპოვეთ A_{32} , თუ $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. პასუხი: -2

გ) იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ მატრიცის მიკავშირებული მატრიცის ელემენტების ჯამი. პასუხი: -27

დ) იპოვეთ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ მატრიცის მესამე სვეტის ელემენტების მინორების ჯამი. პასუხი: 8

6. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

ა) m პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს $\begin{cases} -2x + 3y - mz = 2 \\ x - 2z = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი? პასუხი: -5,5

ბ) იპოვეთ x_2 , თუ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$. პასუხი: 2

გ) სამი რიცხვის ჯამია 3. თუ გაოთხკეცებულ პირველ რიცხვს დავუმატებთ გასამკეცებულ მესამე რიცხვს, ვღებულობთ 15-ს. თუ გახუთკეცებულ მეორე რიცხვს გამოვაკლებთ მესამე რიცხვს, მივიღებთ 3-ს.

გამოთვალეთ პირველი რიცხვი. პასუხი: 6

დ) გამოთვალეთ z ცვლადის მნიშვნელობა, თუ

$\begin{cases} 2x - y + z = 9 - 2y + 2z \\ 3x - y - 4z = 4 + 2x - z \\ x - y + 4z = -2 + y + 3z \end{cases}$ პასუხი: -1

7. სარგებლის მარტივი განაკვეთი

- ა) სარგებლის მარტივი 6%-იანი განაკვეთით აღებული სესხი 2 წელიწადში გახდა 3400 დოლარი. იპოვეთ დისკონტირებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება ყოველ 4 თვეში ერთხელ.

პასუხი: 2500

- ბ) 2500 დოლარი აღებულია სესხად სარგებლის წლიური მარტივი 5 % – იანი განაკვეთით. რა თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ 150 დღეში, თუ დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად (პასუხი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე) ?

პასუხი: 2551

- გ) რამდენ თვეში გაორმაგდება სარგებლის მარტივი 12,5 %-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა, თუ და რიცხვა ხდება ყოველთვიურად ?

პასუხი: 8

- დ) რამდენი წლით უნდა აიღოს მოვალემ 6000 დოლარის კრედიტი სარგებლის წლიური მარტივი 8%-იანი განაკვეთით, რომ ბანკის მოგება იყოს 1920 დოლარი ?

პასუხი: 4

8. სარგებლის რთული განაკვეთი

ა) ბანკში დაბანდებულია 10000 დოლარი სარგებლის წლიური რთული 7,5%-იანი განაკვეთით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი მეანაბრეს 6 წლის ბოლოს (პასუხი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე) ?

პასუხი: 15433

ბ) ბანკში სარგებლის წლიური რთული 6,4%-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა 5 წელში გახდა 4773 დოლარი. რა თანხა დაუბანდება მეანაბრეს (პასუხი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე) ?

პასუხი: 3500

გ) საქონლის თავდაპირველი გასაყიდი ფასია 18000 დოლარი. 3 წლის შემდეგ მისი ფასი გახდა 9600 დოლარი. როგორი წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით ხდება ჩამოფასება (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე) ?

პასუხი: 18,9

დ) სარგებლის წლიური რთული 7%-იანი განაკვეთით დაბანდებული 6000 დოლარი რამდენ წელიწადში გახდება 8415 დოლარი ?

პასუხი: 5

9. სარგებლის ნომინალური წლიური

რთული განაკვეთი

- ა) 2000 დოლარი აღებულია სესხად 2 წლით სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 5%-იანი განაკვეთით, კვარტალური დარიცხვით. გამოთვალეთ გადასახდელი თანხის რაოდენობა.

a) 2209

b) 2210

c) 2108

d) 2190

- ბ) რამდენ წელიწადში გახუთმაგდება სარგებლის ნომინალური წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით დაბანდებული K თანხა, თუ დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად ?

a) $\frac{12 \lg 5}{\lg \left(1 + \frac{r}{1200}\right)}$

b) $\frac{\lg 5}{\lg \left(1 + \frac{r}{1200}\right)}$

c) $\frac{\lg 5}{12 \lg \left(1 + \frac{r}{1200}\right)}$

d) $\frac{\lg 5}{\lg \left(1 + \frac{12r}{100}\right)}$

- გ) 5000 დოლარი დაბანდებულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 6%-იანი განაკვეთით, უწყვეტი დარიცხვით. რა თანხა დაუგროვდება მეანაბრეს 4 წელიწადში ?

a) 6412

b) 6524

c) 6432

d) 6356

- დ) რამდენი წელია საჭირო, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 9%-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა გასამმაგდეს ?

a) 11,6

b) 12,2

c) 10,4

d) 12,8

11. ვალის დაფარვის გეგმა, ანუიტეტი, ინვესტიციების

შეფასება–შედარების კრიტერიუმები

- ა) იპოვეთ ყოველწლიური გადასახადის სიდიდე 100 000 დოლარი ვალისათვის, რომელიც აღებულია 25 წლით სარგებლის წლიური რთული 8%-იანი განაკვეთით.

a) 9368 b) 9218 c) 9821 d) 9456

- ბ) იპოვეთ საწყისი თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველწლიურად იძლევა 12000 დოლარ შემოსავალს 7 წლის მანძილზე, თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 12%.

a) 53790 b) 54765 c) 52485 d) 56350

- გ) საინვესტიციო პროექტი მოითხოვს 15 000 დოლარის ინვესტირებას და გარანტიას იძლევა, რომ 3 წელიწადში ინვესტორს დაუბრუნებს 20 000 დოლარს. გამოთვალეთ (NPV) (ან (IRR)), თუ საფინანსო ბაზრის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთია 5%.

a) 2249 b) 2135 c) 2277 d) 2387

- დ) იურიდიულ პირს ყოველი წლის დასაწყისში ბანკში შეაქვს K დოლარი სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით. რა თანხა დგროვდება მის ანგარიშზე n წელიწადში ?

a) $\frac{Kq - 1}{q q^n - 1}$ b) $Kq^n \frac{q - 1}{q^n - 1}$ c) $Kq \frac{q^n - 1}{q - 1}$ d) $\frac{Kq^n - 1}{q q - 1}$

შენიშვნა: $q = 1 + r/100$

12. რიცხვითი მიმდევრობები

ა) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ რიცხვითი მიმდევრობის ზოგადი წევრია

a) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = (-1)^{n+4} \frac{n}{2n-1}$

c) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$ d) $a_n = (-1)^{n+2} \frac{n}{n+1}$

ბ) რიცხვითი მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(n+2)!}$.

ამ მიმდევრობის მეოთხე წევრია

a) 9/50 b) 9/40 c) -9/80 d) -9/70

გ) რიცხვითი მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = \frac{1}{3n^2+1}$.

ეს მიმდევრობა

a) შემოსაზღვრულია და კლებადია

b) შემოსაზღვრულია ზემოდან და ზრდადია

c) შემოსაზღვრულია ქვემოდან და კლებადია

d) არაა შემოსაზღვრული და მონოტონურია

დ) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ და

$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 4a_n$, $n \geq 1$. ამ მიმდევრობის მეოთხე წევრია

a) 32 b) 15 c) 38 d) 27

13. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 2n}{n - 1} = ?$

- a) 4 b) 1 c) 3 d) -2

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^n}{7 \cdot 3^n + 5^{n+1}} = ?$

- a) 7/3 b) 3/5 c) 2/3 d) 1/5

გ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)! - (n + 2)!}{(n + 4)! + (n + 2)!} = ?$

- a) 1 b) 1/2 c) 0 d) ∞

დ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 2)^3 - 8n^3}{(n + 1)^3 + (n + 3)^3} = ?$

- a) 5/2 b) 7/2 c) -7/2 d) -3

14. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} 24 \cdot \left(\frac{3 + 6 + \dots + 3n}{6n + 8} - \frac{n}{4} \right) = ? \left(\text{ან } \lim_{n \rightarrow \infty} 18 \cdot \frac{1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}} = ? \right)$

- a) 5 b) 4 c) -2 d) -3

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \right) = ? \left(\text{ან } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7}{n^2 + 5} \right)^{n^2 + 1} \right)$

- a) 2 b) 1/2 c) 1/3 d) 1

გ) რიცხვითი მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_1 = 1$,

$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 6} - 1, \quad n \geq 1$. მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით

მტკიცდება, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრუ-

ლი, რის გამოც იგი კრებადია. იპოვეთ ამ მიმდევრობის ზღვარი.

- a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{6}$

15. რიცხვითი მწკრივები

ა) იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$ მწკრივის ჯამი

- a) 7/12 b) 5/12 c) 3/4 d) 3/10

ბ) იპოვეთ მწკრივის ჯამი, თუ ამ მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობაა

$$S_n = 16 \cdot \left(\frac{5n + 1}{8n + 3} - \frac{3n - 2}{4n + 5} \right).$$

- a) 3 b) -3/10 c) -2 d) 3/5

გ) ცნობილია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ კრებადი მწკრივებია, მაშინ

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ მწკრივი კრებადია b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2$ მწკრივი განშლადია

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ მწკრივი კრებადია d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ მწკრივი განშლადია

დ) თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივის ზოგადი წევრია $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{n^2}$, მაშინ

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ მწკრივი კრებადია b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი განშლადია

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ მწკრივი კრებადია d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$ მწკრივი განშლადია

16. რიცხვითი მწკრივები

ა) იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ მწკრივის ჯამი.

- a) $5/12$ b) $7/12$ c) $3/4$ d) $1/6$

ბ) გამოთვალეთ დალამბერის ნიშანში მითითებული q შემდეგი

მწკრივისათვის $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 4^{n+1}}$.

- a) $5/2$ b) $4/5$ c) $2/5$ d) $5/4$

გ) გამოთვალეთ კოშის ნიშანში მითითებული q შემდეგი

მწკრივისათვის $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- a) $1/4 e$ b) $e/4$ c) $4/e$ d) $4 e$

დ) ცნობილია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$ კრებადი მწკრივია, მაშინ a

პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა

- a) $a \neq 0$ b) $a > 1$ c) $|a| > 1$ d) $a < -1$