

მათემატიკა ეკონომიკასა და ბიზნესში 2

(მათემატიკა ეკონომისტებისათვის 2)

შუალედური გამოცდა

(30 ქულა = 12x2,5ქულა)

თეორიული საკითხების ჩამონათვალი

ერთი ცვლადის ფუნქცია: ფუნქციის განსაზღვრის არე, ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ფუნქციის გრაფიკი, შექცეული ფუნქცია, რიცხვითი ფუნქციის მონოტონურობა, ლუწობა, კენტობა, შემოსაზღვრულობა; ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები და მათი თვისებები; ამონაგების, დანახარჯისა და მოგების ფუნქციები; ფუნქციის ზღვარი წერტილში, ცალმხრივი ზღვრები; განუსაზღვრელობები, უსასრულოდ დიდი ფუნქცია, უსასრულოდ მცირე ფუნქცია; ფუნქციის უწყვეტობა, ფუნქციის წყვეტა და წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია; ფუნქციის წარმოებული, ფუნქციის გრაფიკის მხები; წარმოებულის გამოთვლის წესები, ძირითადი წარმოებულების ცხრილი, რთული ფუნქციის წარმოებული, მაღალი რიგის წარმოებულები, ფუნქციის დიფერენციალი; მარგინალური ფუნქციები; ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების დადგენა წარმოებულის გამოყენებით; მოთხოვნისა და მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ; ფუნქციის ექსტრემუმი, ექსტრემუმის დადგენის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და გადაღუნვის წერტილი.

ნ ი მ უ შ ი

(გამოცდაზე ყოველ საკითხს ექნება ოთხი სავარაუდო პასუხი)

1. ერთი ცვლადის ფუნქცია

1.1. იპოვეთ $y = \ln(5x + x^2)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

1.2. იპოვეთ $y = \frac{3x^4 + 8x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

1.3. იპოვეთ $y = \sqrt{x^2 - 4x + 29}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

1.4. იპოვეთ $y = 7^{x^2 + 2x + 3}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

1.5. მოცემული ფუნქციებიდან ლუწი ფუნქციაა (კენტი ფუნქციაა, არც

ლუწი და არც კენტი ფუნქციაა) :

ა) $y = 5x^3 - 2x + 19$ ბ) $y = \frac{1}{2 + x^2}$

გ) $y = \frac{x^3 + 2x}{5 + x^2}$ დ) $y = (2x - 3)^2 - (2x + 3)^2$

ე) $y = \sqrt{7 - x} + \sqrt{7 + x}$ ვ) $y = x^2 \cdot 5^x$

2. ერთი ცვლადის ფუნქცია

2.1. იპოვეთ $y = \frac{x^3 + 7}{8}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

2.2. იპოვეთ $y = \frac{6x + 1}{5x + 4}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია

2.3. იპოვეთ $y = \log_7(6x - 11)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის

მნიშვნელობა არგუმენტის $x_0 = 2$ მნიშვნელობისათვის.

- 2.4. იპოვეთ $y = 5^{3x-10}$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის მნიშვნელობა არგუმენტის $x_0 = 25$ მნიშვნელობისათვის.
- 2.5. a პარამეტრის რა უმცირესი მნიშვნელობისათვის ეკუთვნის $M(a, 3a)$ წერტილი $y = x^2 + 4x - 12$ ფუნქციის გრაფიკს?

3. ამონაგების, დანახარჯისა და მოგების ფუნქციები

- 3.1. წიგნისფასი გაიზარდა 13ლარიდან 15ლარამდე, შესაბამისად, მასზე მოთხოვნა შემცირდა 600 ერთეულიდან 500 ერთეულამდე, როგორ უნდა იყოს წიგნისფასი, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური (დამოკიდებულება ფასსა და მოთხოვნას შორის წრფივია) ან იპოვეთ მაქსიმალური მთლიანი ამონაგები.
- 3.2. საწარმოს მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -2Q + 80$, ფიქსირებული დანახარჯია 70 ერთეული, ცვლადი დანახარჯი 8 ერთეული. საქონლის რა უდიდესი რაოდენობა ასაჭირო, რომ საწარმომ იმუშაოს ნულოვან ზღვარზე.
- 3.3. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -Q + 50$, საშუალო დანახარჯის ფუნქციაა $(AC) = 6 + \frac{20}{Q}$. საქონლის რამდენი მაქსიმალური რაოდენობა იძლევა 64 ერთეულის ტოლ მოგებას?
- 3.4. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -3Q + 30$, ფიქსირებული დანახარჯია 20 ერთეული, ცვლადი დანახარჯია 2 ერთეული. საქონლის რა მაქსიმალური რაოდენობა იძლევა 11 ერთეულის ტოლ წაგებას.

4. ფუნქციის ზღვარი

4.1. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{5x^2 - 6}$ ან $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{5x - 9} + 3}$.

4.2. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -3} 2^{4x^2 + x - 30}$ ან $\lim_{x \rightarrow -5} \log_7(3x^2 + 10x + 24)$.

4.3. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(11x^2 - \frac{9}{|x^2 - 4|} \right)$ ან $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 12}}{10x + 1}$.

4.4. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x} + 5}$ ან $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11x + \sqrt{6x + 17}}{\sqrt{x - 2} + 3x^2}$.

5. ფუნქციის ზღვარი

5.1. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9}$ ან $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{4}{x} - \frac{8}{x + 4}}{4 - x}$.

5.2. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{9 + 9x^3}{(x + 1)(4x - 2)}$.

5.3. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x + 20}{\sqrt{x + 21} - 4}$ ან $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 7x} - \sqrt{9x^2 - x})$.

5.4. გამოთვალეთ ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(x + 2)(2x - 3)} - \frac{6}{(x + 2)(5x - 4)} \right)$.

5.5. იპოვეთ a პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2a - 1)x^2 - 2ax}{(3a + 5)x^2 + 12a} = -2 .$$

6. ფუნქციის უწყვეტობა, წყვეტა და წყვეტის წერტილები

6.1. მოცემულია $f(x) = \frac{\sqrt{5x-x}}{x-5}$ ფუნქცია.

a) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის აცილებადი ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)

b) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის ნახტომის ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)

c) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილი

d) $x_0 = 5$ წერტილში f ფუნქცია არის უწყვეტი

6.2. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^3-x}{(x+1)(x-7)}$ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის

წერტილები.

6.3. იპოვეთ a პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ f ფუნქციის ნახტომი $x_0 = -5$ წერტილში არის 10-ის ტოლი.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10a}{x} - 3x, & x \leq -5 \\ 6x + ax^2 + 20, & x > -5 \end{cases}$$

6.4. იპოვეთ $x_0 = 4$ წერტილში $f(x) = \begin{cases} \log_2 \frac{x}{8}, & 0 < x < 4 \\ e^{x-4} + 5, & 4 \leq x \leq 12 \end{cases}$ ფუნქციის

მარჯვენა და მარცხენა ზღვრების საშუალო არითმეტიკული.

6.5. იპოვეთ a პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც f ფუნქცია არის უწყვეტი $x_0 = -5$ წერტილში, თუ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x}{25-x^2}, & x \neq -5 \\ 4a-3, & x = -5 \end{cases}.$$

7. ფუნქციის წარმოებული

7.1. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, თუ x იცვლება 1-დან 43-მდე და $y = 84 \log_7(x+6) - 12$.

7.2. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, თუ x იცვლება 4-დან 9-მდე და $y = 5^{\sqrt{x-1}} + x - 1$.

7.3. იპოვეთ $f(x) = \frac{16}{x} - 2x + \frac{8}{x^2} + 1$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 2$ წერტილში.

7.4. იპოვეთ $f(x) = 4\sqrt{x} - 6 \ln x + 4\sqrt[3]{x}$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 1$ წერტილში.

7.5. იპოვეთ $f(x) = (5x^2 - 2x + 3)e^x$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 0$ წერტილში.

7.6. იპოვეთ $f(x) = \frac{3x - 7 \ln x}{x^2 + 5}$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 1$ წერტილში.

8. რთული ფუნქციის წარმოებული, ფუნქციის დიფერენციალი, ფუნქციის გრაფიკის მხები

8.1. $y = \frac{5x+6}{3x-10}$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $M(3; -21)$ წერტილში გავლებულია მხები. იპოვეთ ამ მხების განტოლება.

8.2. $y = -2x^3 + 5x^2 + 6x - 29$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $M(1; -20)$ წერტილში გავლებულია მხები. იპოვეთ ამ მხების განტოლება.

8.3. იპოვეთ $y = \ln(5x^2 + 6\sqrt{x})$ ფუნქციის წარმოებული.

- 8.4. იპოვეთ $y = x^5 \ln^2 x$ ფუნქციის წარმოებული.
- 8.5. იპოვეთ $y = xe^{x^2+5x}$ ფუნქციის წარმოებული.
- 8.6. იპოვეთ $y = 8\sqrt[5]{(6x-1)^4}$ ფუნქციის წარმოებული.
- 8.7. იპოვეთ $y = \lg \frac{e^x + 3}{x^2 + 1}$ ფუნქციის დიფერენციალი.
- 8.8. იპოვეთ $y = x^6 \cdot 7^{x-3}$ ფუნქციის დიფერენციალი.

9. მარგინალური ფუნქციები

- 9.1. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \frac{200}{\sqrt{21+Q}}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობა, როცა $Q = 4$.
- 9.2. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \sqrt[3]{1000-10Q}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია.
- 9.3. მოთხოვნის ფუნქციაა $Q = 100e^{-0.2P}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია (როგორც Q ცვლადის ფუნქცია) და $(MR)(10)$.
- 9.4. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 7Q + 120$, ხოლო მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა $(TR) = 60 \ln(1 + 70Q^2)$. იპოვეთ მარგინალური მოგების მნიშვნელობა, როცა $Q = 5$.
- 9.5. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \sqrt{500-2Q}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია და $(MR)(200)$.

9.6. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \sqrt{125 - Q^2}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების მნიშვნელობა, როცა $Q = 10$.

9.7. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \frac{1}{\sqrt{100 + 2Q^2}}$. იპოვეთ მარგინალური ამონაგების ფუნქცია.

10. მარგინალური ფუნქციები, ელასტიკურობები

10.1. წარმოების საშუალო დანახარჯია $(AC) = 10Q + 5 + \frac{25}{Q}$. გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების მიახლოებითი მნიშვნელობა მარგინალური დანახარჯის საშუალებით, თუ პროდუქციის რაოდენობა შემცირდა $Q_1 = 9$ -დან $Q_2 = 7$ -მდე (ან გაიზარდა $Q_1 = 7$ -დან $Q_2 = 9$ -მდე).

10.2. საწარმოს მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -4Q + 60$. მარგინალური ამონაგების საშუალებით გამოთვალეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ პროდუქციის რაოდენობა გაიზარდა $Q_1 = 10$ -დან $Q_2 = 14$ -მდე (ან შემცირდა $Q_1 = 14$ -დან $Q_2 = 10$ -მდე).

10.3. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -2Q^2 - 11Q + 990$. როგორია მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ $Q = 16$ და ფასის პროცენტული ცვლილებაა 3,2%?

10.4. მიწოდების ფუნქციაა $Q = 0,06P^2 + 2P + 3$. როგორია მიწოდების

პროცენტული ცვლილება, თუ $P = 14$ და ფასის პროცენტული ცვლილებაა $8,5\%$?

10.5. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = \sqrt{900 - 50Q}$.გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 20$.

10.6. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 500 - 70 \ln(Q + 35)$.გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $Q = 20$.

11. მონოტონურობის შუალედები, ფუნქციის ექსტრემუმი

11.1. იპოვეთ $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ფუნქციის კლებადობის შუალედი.

11.2. იპოვეთ $f(x) = \ln(9 - x^2)$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედი.

11.3. იპოვეთ $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$ ფუნქციის კლებადობის (ზრდადობის) შუალედი.

11.4. იპოვეთ $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

11.5. იპოვეთ $f(x) = \ln x - 2x^2$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

11.6. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$(TC) = 2Q^3 - 21Q^2 + 360Q + 425, \text{ სადაც } Q \text{ პროდუქციის მოცულობაა.}$$

წარმოების რა მოცულობის დროს იქნება დანახარჯი

მინიმალური (იპოვეთ წარმოების მინიმალური დანახარჯი).

12. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა,
გადაღუნვის წერტილი

- 12.1. იპოვეთ $f(x) = xe^{-5x}$ ფუნქციის ზემოთ ამოზნექილობის შუალედი.
- 12.2. იპოვეთ $f(x) = (x-2)\ln x$ ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედი.
- 12.3. იპოვეთ $f(x) = x^4 + 10x^2 - 18x + 67$ ფუნქციის ზემოთ (ქვემოთ) ამოზნექილობის შუალედი (ასევე იპოვეთ გადაღუნვის წერტილების აბსცისები).
- 12.4. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 8x - 22$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილების აბსცისები.
- 12.5. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} + 8x - 17$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილების აბსცისები.
- 12.6. დაადგინეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ $f(x) = x^2 - a \ln x$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის აბსცისაა 1.