

Математика в экономике и бизнесе 1 (2020-2021)

Финальный экзамен

40 баллов

Всего 16 заданий (16x2,5=40 баллов)

Перечень тем

Линейные функции, линейные уравнения, линейные уравнения с параметром, линейные неравенства, системы линейных алгебраических уравнений; линейные функции спроса и предложения, равновесная цена и равновесная величина; степенные и логарифмические функции; матрицы, единичная матрица, транспонированная матрица; сумма и разность матриц, произведение матрицы на число; произведение матриц; определители второго и третьего порядка, минор и алгебраическое дополнение элемента; обратная матрица и её вычисление; решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера; простая и сложная процентная ставки; номинальная процентная ставка; эквивалентные ставки; покрытие долга по частям, аннуитет, оценка и сравнение инвестиций; числовые последовательности, способы задания последовательности; монотонные и ограниченные последовательности; предел последовательности; свойства сходящихся последовательностей; число Эйлера (неперово число), непрерывное начисление процентов; числовой ряд и его сумма, необходимое условие сходимости; признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши сходимости рядов.

Образцы заданий

1. Спрос и предложение

а) Дана линейная функция спроса $P = f_D(Q) = aQ + b$. Найти значение параметра a , если известно, что цена изменяется в промежутке $[0; 120]$, а спрос - в промежутке $[0; 20]$. Ответ: -6

б) Функция предложения задана в неявном виде $3P - 5Q - 840 = 0$. На сколько единиц увеличится предложение, если цена увеличится на 10 единиц. Ответ: 6

в) Известно, что когда цена равна 90 единицам, спрос составляет 10 единиц. Увеличение цены на 12 единиц вызывает уменьшение спроса на 4 единицы. Чему будет равна цена при спросе 25 единиц (функция спроса линейная)? Ответ: 45

г) Найти наибольшее целое значение параметра a , если функция предложения имеет вид

$$P = f_s(Q) = (1 + a)(4 - a)Q + (290 - 110a). \text{ Ответ: } 2$$

2. Спрос и предложение, равновесие

а) Функция спроса $P = -4Q + 120$, а функция предложения $P = 0,5Q + 30$. Правительство установило фиксированный налог на каждую единицу проданной продукции. Найти величину установленного налога, если цена нового равновесия 48\$. Ответ: 9

б) Функция спроса имеет вид: $aP + \frac{1}{9}(8a - 20)Q - 560 = 0$. Найти значение параметра a , если известно, что увеличение цены на 4 единицы вызывает уменьшение спроса на 9 единиц. Ответ: 5

г) Функция спроса $P = -5Q + 150$, а функция предложения $P = \frac{1}{2}Q + 40$. Найти новую величину равновесия, если на каждую единицу проданной продукции установлен налог, равный 10% стоимости продукции (ответ округлить до десятой доли). Ответ: 19

д) Функция спроса $P = f_D(Q) = aQ + 120$, а функция предложения

$P = f_S(Q) = (\frac{1}{2}a^2 + a)Q + 20$. Найти величину параметра a , если равновесная величина равна 8 единицам. Ответ: -5

3. Матрицы, линейные операции над матрицами

а) Вычислить $a - b$, если $\begin{bmatrix} a-4 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 0 & b-8 & 5 \end{bmatrix}$. Ответ: 6

б) Дано $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$. Найти сумму всех элементов второй

строки матрицы $C = 4A - 3B^T$. Ответ: 16

в) Вычислить $3a + 2b$, если $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & a \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & b & -4 \end{bmatrix}$ и $A = A^T$. Ответ: -4

г) Найти сумму чисел x и y , если $\begin{pmatrix} 5x+11 & 0 \\ 7x+14 & 6y-11 \end{pmatrix}$ единичная матрица.

Ответ: 0

4. Произведение матриц, обратная матрица

а) Дано $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = AB$. Найти сумму всех таких элементов c_{ij} матрицы C , для которых $i \neq j$. Ответ: 7

б) Найти наибольший элемент матрицы $10A^{-1} - A^T$, если $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Ответ: 3

в) Найти наименьший элемент матрицы X , если $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: -23.

г) Найти значение параметра m , при котором выполняется равенство $A^2 = (m+2)A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Ответ: 1

5. Определители, миноры, алгебраические дополнения

а) Найти x , если $\begin{vmatrix} 2x & -2 & 1 \\ 4 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & x \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - x$. Ответ: 4

б) Найти A_{32} , если $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Ответ: -2

в) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов союзной (присоединённой) матрицы A^* . Ответ: -27

г) Найти сумму миноров всех элементов третьего столбца матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: 8

6. Системы линейных алгебраических уравнений

а) При каком значении параметра m система уравнений $\begin{cases} -2x + 3y - mz = 2 \\ x - 2z = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ не имеет

единственного решения? Ответ: -5,5

б) Найти x_2 , если $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$. Ответ: 2

в) Сумма трёх чисел равна 3. Если первое из этих чисел умножить на 4 и затем к нему прибавить утроенное третье число, то получим 15. Если же второе число умножить на 5 и затем отнять третье число, то получим 3. Найти первое число. Ответ: 6

г) Найти z , если
$$\begin{cases} 2x - y + z = 9 - 2y + 2z \\ 3x - y - 4z = 4 + 2x - z \\ x - y + 4z = -2 + y + 3z \end{cases}$$
 Ответ: -1

7. Простая процентная ставка (2 балла)

а) Долг по кредиту, взятому с 6%-ой простой ставкой, за 2 года стал равным 3400 долларам. Найти дисконтированную величину, если начисление этих 6% происходит каждые 4 месяца. Ответ: 2500

б) Взят кредит 2500 долларов с 5 %-ой простой годовой ставкой. Какую сумму должен вернуть должник через 150 дней (ответ округлить до целого числа)?

Ответ: 2551

в) За сколько месяцев удвоится внесённая в банк сумма с 12,5 %-ой простой месячной ставкой? Ответ: 8

г) На какой срок (число лет) был взят кредит 6000 долларов с 8%-ой простой годовой ставкой, если известно, что прибыль банка составила 1920 долларов? Ответ: 4

8. Сложная процентная ставка

а) В банк внесено 10000 долларов с 7,5 %-ой сложной годовой ставкой. Какую сумму возвратит банк вкладчику через 6 лет (ответ округлить до целого числа)?

Ответ: 15433

б) Внесённая в банк с 6,4 %-ой сложной годовой ставкой сумма через 5 лет стала равной 4773 долларам. Какую сумму внёс в банк вкладчик? (Ответ округлить до целого числа).

Ответ: 3500

в) Первоначальная цена товара была равна 18000 долларов. Через 3 года она стала равной 9600 долларам. Какова сложная годовая процентная ставка понижения цены (ответ округлить до первого десятичного знака)?

- a) 19,7b) 18,4 c) 19,2d) 18,9

г) Через сколько лет внесённая в банк сумма, равная 6000 долларам,станет равной 8415 долларам, если сложная годовая ставка банка равна 7 %?Ответ: 5

9. Номинальная сложная годовая ставка

а) Долг 2000 долларов взят на 2 года со сложной годовой5% -ой номинальнойставкой с ежеквартальным начислением. Сколько долларов должник должен внести в банк по истечении указанного срока ?

- a) 2209 b) 2210 c) 2108d) 2190

б) Через сколько лет величина вклада K станет в 5 раз больше, чем была, если сложная номинальная годовая ставка банка равна r % с ежемесячным начислением ?

a) $\frac{K \lg 5}{\lg(1+r/1200)}$ b) $\frac{\lg 5}{12K \lg(1+r/100)}$

c) $\frac{\lg 5}{12 \lg(1+r/1200)}$ d) $\frac{\lg 5}{\lg(1+12r/100)}$

в) 5000 долларов внесено в банк с 6 %-ой годовой номинальной ставкой с непрерывным начислением. Какая сумма наберётся у вкладчика через 4 года ?

- a) 6412b) 6524 c) 6432d) 6356

г) За сколько лет утроится внесённая в банк сумма, если непрерывная годовая сложная номинальная ставка равна 9 %?

- a) 11,6b) 12,2 c) 10,4 d) 12,8

10. Эквивалентные ставки

а) Найти сложную квартальную ставку, эквивалентную сложной годовой 9 %-ой ставке.

а) 2,31 б) 2,03 в) 2,23 д) 2,18

б) Найти сложную годовую ставку, эквивалентную сложной номинальной 17 %-ой ставке с непрерывным начислением.

а) 18,53 б) 18,25 в) 17,75 д) 18,15

в) Найти простую годовую ставку, эквивалентную за n лет сложной r %-ой годовой ставке.

а) $\left(\sqrt[n]{1 + \frac{r}{100}} - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$ б) $\left(\sqrt[n]{1 - \frac{r}{100}} + 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$

в) $\left(\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$ д) $\left(\left(1 - \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$

г) Кредит выдан на 10 лет со сложной 8 %-ой годовой ставкой. С какой простой годовой ставкой надо выдать такую же сумму, чтобы за тот же период времени сумма кредита стала бы в 2 раза больше, чем в случае сложной ставки?

а) 29,4 б) 33,2 в) 34,6 д) 32,3

11. План покрытия долга по частям, аннуитет, критерии оценок и сравнение инвестиций

а) Какую сумму должен выплачивать ежегодно должник при взятии долга 100000 долларов с 8 %-ой сложной годовой ставкой сроком на 25 лет ?

а) 9368 б) 9218 в) 9821 д) 9456

б) Найти начальную сумму того аннуитета, который ежегодно даёт доход 12000 долларов в течении 7 лет, если сложная годовая ставка доходности равна 12 %.

а) 53790 б) 54765 в) 52485 д) 56350

в) Инвестиционному проекту требуется 15000 долларов и даётся гарантия того, что через 3 года инвестору будет возвращено 20000 долларов. Найти чистую приведённую стоимость NPV (или внутреннюю ставку доходности IRR), если на финансовом рынке доминантная годовая сложная ставка 5%.

- a) 2249 b) 2135 c) 2277 d) 2387

г) Юридическое лицо в начале каждого года вносит в банк K долларов со сложной годовой r %-ой ставкой. Какая сумма будет у него на счету через n лет?

- a) $\frac{K}{q} \frac{q-1}{q^n-1}$ b) $K q^n \frac{q-1}{q^n-1}$ c) $K q \frac{q^n-1}{q-1}$ d) $\frac{K}{q} \frac{q^n-1}{q-1}$ Примечание: $q = 1 + r/100$

12. Числовая последовательность

а) Написать общий член последовательности $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

a) $a_n = (-1)^{n+2} \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = (-1)^{n+4} \frac{n}{2n-1}$

c) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$ d) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

б) Общий член последовательности $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(n+2)!}$. Четвёртый член этой последовательности равен

- a) 9/50 b) 9/40 c) -9/80 d) -9/70

в) Общий член последовательности $a_n = \frac{1}{3n^2+1}$. Эта последовательность

a) ограниченная и убывающая

b) ограничена сверху и возрастает

c) неограничена снизу и убывающая

d) неограниченная и монотонная

г) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 4a_n$, $n \geq 1$.
Найти четвёртый член этой последовательности.

- a) 32 b) 15 c) 38 d) 46

13. Предел последовательности

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 2n}{n - 1} = ?$

а) 4 б) 1 в) 3 д) -2

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^n}{7 \cdot 3^n + 5^{n+1}} = ?$

а) 7/3 б) 3/5 в) 2/3 д) 1/5

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+4)! + (n+2)!} = ?$

а) 1 б) 1/2 в) 0 д) ∞

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^3 - 8n^3}{(n+1)^3 + (n+3)^3} = ?$

а) 5/2 б) 7/2 в) -7/2 д) -3

14. Предел последовательности

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} 24 \cdot \left(\frac{3+6+\dots+3n}{6n+8} - \frac{n}{4} \right) = ?$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} 18 \cdot \frac{1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}} = ?$)

а) 5 б) 4 в) -2 д) -3

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) = ?$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7}{n^2 + 5} \right)^{n^2 + 1} = ?$)

а) 2 б) 1/2 в) 1/3 д) 1

в) Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 6} - 1, n \geq 1$. Известно, что данная последовательность возрастающая и ограничена сверху, из чего следует, что она сходится. Найти предел этой последовательности.

- а) $-\sqrt{2}$ б) $\sqrt{5}$ в) $\sqrt{7}$ д) $\sqrt{6}$

15. Числовые ряды

а) Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$

- а) $7/12$ б) $5/12$ в) $3/4$ д) $3/10$

б) Найти сумму ряда, если последовательность его частичных сумм равна

$$S_n = 16 \left(\frac{5n+1}{8n+3} - \frac{3n-2}{4n+5} \right).$$

- а) 3 б) $-3/10$ в) -2 д) $3/5$

в) Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходящиеся ряды. Тогда обязательно

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2$ расходится

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится д) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ расходится

г) Если $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{n^2}$ есть общий член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ сходится б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ сходится д) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n$ расходится

16. Числовые ряды

а) Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

а) 5/12 б) 7/12 в) 3/4 д) 1/6

б) Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 4^{n+1}}$ на сходимость воспользуйтесь признаком

Даламбера и найдите соответствующее значение q

а) $q = 5/2$ б) $q = 4/5$ в) $q = 2/5$ д) $q = 5/4$

в) Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ на сходимость воспользуйтесь радикальным признаком Коши и найдите соответствующее значение q .

а) 1/4 б) e/4 в) 4/e д) 4 e

г) Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^{2n}}$, $a \in R$ сходится. Тогда множество всех допустимых значений параметра a определяется условием

а) $a \neq 0$ б) $a > 1$ в) $|a| > 1$ д) $a < -1$