

## მათემატიკა ეკონომიკასა და ბიზნესში 2

(მათემატიკა ეკონომისტებისათვის 2)

(დასკვნითი გამოცდის ნიმუში)

40 ქულა

(40 ქულა = 16x2,5ქულა)

ზურაბ თედიაშვილი

### თეორიული საკითხების ჩამონათვალი

ფუნქციის უწყვეტობა, ფუნქციის წყვეტა და წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია; ფუნქციის წარმოებული, წარმოებულის გამოთვლის წესები, ძირითადი წარმოებულების ცხრილი, რთული ფუნქციის წარმოებული, მარგინალური ფუნქციები; ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების დადგენა წარმოებულის გამოყენებით; ფუნქციის ექსტრემუმი, ექსტრემუმის დადგენის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ფუნქციის უდიდესი(უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე; ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები; მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები; მოთხოვნის ფუნქციის კერძო ელასტიკურობები; ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი; პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი; განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები და ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი; განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის წესები – უშუალო ინტეგრების წესი, ჩასმის წესი და ნაწილობითი ინტეგრების წესი; განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ძირითადი თვისებები; ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულა; განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის წესები – უშუალო ინტეგრების წესი, ჩასმის წესი და ნაწილობითი ინტეგრების წესი; ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.

*შენიშვნა: ყველა ლიადაბოლოებიანი საკითხის პასუხი სტუდენტმა უნდა ჩაწეროს ათწილადი რიცხვის სახით; ასეთი რიცხვის კომპიუტერში ჩასაწერად მძიმის ნაცვლად გამოიყენეთ წერტილი და საჭიროების შემთხვევაში რიცხვის დამრგვალება განახორციელოთ ტექსტში მითითებულ თანრიგამდე.*

1. ფუნქციის უწყვეტობა, წყვეტა და წყვეტის წერტილები

1.1. მოცემულია  $f(x) = \frac{\sqrt{5x-x}}{x-5}$  ფუნქცია.

- a)  $x_0 = 5$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის აცილებადი ტიპის წყვეტის წერტილი ( I გვარის წყვეტის წერტილი )
- b)  $x_0 = 5$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის ნახტომის ტიპის წყვეტის წერტილი ( I გვარის წყვეტის წერტილი )
- c)  $x_0 = 5$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილი
- d)  $x_0 = 5$  წერტილში  $f$  ფუნქცია არის უწყვეტი

1.2. იპოვეთ  $f(x) = \frac{x^3 - x}{(x+1)(x-7)}$  ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილები.

- a)  $x \in \emptyset$
- b)  $x = 7$
- c)  $x = -1$  და  $x = 7$
- d)  $x = -1$

1.3. რამდენი წყვეტის წერტილი აქვს  $f(x) = \begin{cases} \frac{16}{x+6} - 3^x, & x \leq 2 \\ 3e^{x-2} - \frac{20}{x}, & x > 2 \end{cases}$  ფუნქციას?

- a) 0
- b) 3
- c) 1
- d) 2

1.4. მოცემულია  $f$  ფუნქცია, რომლისთვისაც  $f(x_0-) = -8$  და  $f(x_0+) = 8$ . მაშინ:

- a)  $x_0$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის აცილებადი ტიპის წყვეტის წერტილი ( I გვარის წყვეტის წერტილი )
- b)  $x_0$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის ნახტომის ტიპის წყვეტის წერტილი ( I გვარის წყვეტის წერტილი )
- c)  $x_0$  წერტილში  $f$  ფუნქცია არის უწყვეტი
- d)  $x_0$  წერტილი არის  $f$  ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილი

1.5. იპოვეთ  $a$  პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x}{25 - x^2}, & x \neq -5 \\ 4a - 3, & x = -5 \end{cases}$  ფუნქცია არის უწყვეტი  $x_0 = -5$  წერტილში.





4.5. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$(TC) = 2Q^3 - 21Q^2 + 36Q + 425, \text{ სადაც } Q \text{ პროდუქციის მოცულობაა.}$$

იპოვეთ წარმოების მინიმალური დანახარჯი.

a) 317

b) 326

c) 348

d) 305

## 5. ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე

5.1–5.3 იპოვეთ  $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა  $[0; 3]$  სეგმენტზე. პასუხი: 17

5.4–5.5 იპოვეთ  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$  ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა  $[-1; 2]$  სეგმენტზე. პასუხი: -11

## 6. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

6.1. იპოვეთ  $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$  ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტის

OX ღერძთან თანაკვეთის აბსცისა. პასუხი: 4,4

6.2. იპოვეთ  $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$  ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტის

OY ღერძთან თანაკვეთის ორდინატა. პასუხი: -22

6.3. იპოვეთ  $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$  ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების თანაკვეთის

ორდინატა. პასუხი: -42

6.4.  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 24x} - 6x$  ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია  $y = kx + b$   
წრფე, როცა  $x \rightarrow +\infty$ . იპოვეთ  $k$ . პასუხი:  $-4$

6.5.  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 24x} - 6x$  ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია  $y = -4x + b$   
წრფე, როცა  $x \rightarrow +\infty$ . იპოვეთ  $b$ . პასუხი:  $6$

## 7. ფუნქციის კერძო წარმოებულები

- 7.1. იპოვეთ  $f'_x(-2;1)$ , თუ  $f(x, y) = (y^2 - 2)e^{4x^2 + 7x - 2}$ . პასუხი:  $9$
- 7.2. იპოვეთ  $f'_y(-3;2)$ , თუ  $f(x, y) = (3 - x^2)\ln(2 + y^2)$ . პასუხი:  $-4$
- 7.3. იპოვეთ  $f'_y(-3;1)$ , თუ  $f(x, y) = \frac{2x^2 - 16}{x + 4y}$ . პასუხი:  $-8$
- 7.4. იპოვეთ  $f'_x(1;0)$ , თუ  $f(x, y) = \frac{2y^3 + 10}{3x - e^y}$ . პასუხი:  $-7,5$
- 7.5. იპოვეთ  $f'_y(1;-1)$ , თუ  $f(x, y) = 24\sqrt{3x^4 y^2 + y^2 + 12}$ . პასუხი:  $-12$

## 8. ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

- 8.1. იპოვეთ  $f''_{xx}(1;-1)$ , თუ  $f(x, y) = 45\ln(2x^2 + y^2)$ . პასუხი:  $-20$
- 8.2. იპოვეთ  $f''_{yy}(2;-1)$ , თუ  $f(x, y) = \ln(x^4 + 3xy)$ . პასუხი:  $-0,36$
- 8.3–8.4. იპოვეთ  $f''_{yx}(4;-2)$ , თუ  $f(x, y) = \frac{5 - 4x}{9 + 3y - y^2}$ . პასუხი:  $28$
- 8.5. იპოვეთ  $f''_{xy}(-2;4)$ , თუ  $f(x, y) = \frac{3 - 24y}{10 + 3x - 2x^2}$ . პასუხი:  $16,5$

## 9. მოთხოვნის ფუნქციის კერძო ელასტიკურობები

9.1–9.2 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია  $Q = f(P, P_A, Y) = 3000 - 4P^2 + 10P_A - 0,01Y^2$ .

გამოთვალეთ  $E_P$ , თუ  $P = 15, P_A = 30, Y = 200$ . პასუხი: 0,9

9.3 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია  $Q = f(P, P_A, Y) = 3000 - 4P^2 + 10P_A - 0,01Y^2$ .

გამოთვალეთ  $E_Y$ , თუ  $P = 15, P_A = 30, Y = 200$ . პასუხი: 0,4

9.4–9.5 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია  $Q = f(P, P_A, Y) = 2400 - 20P + 4P_A^2 - 0,01Y^2$ .

გამოთვალეთ  $E_{P_A}$ , თუ  $P = 25, P_A = 15, Y = 200$ . პასუხი: 0,75

## 10. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

10.1–10.3 ფირმა აწარმოებს ორი სახის საქონელს. პირველი საქონლის ერთეულის ფასია  $P_1 = 200$ , ხოლო მეორის –  $P_2 = 250$ . იპოვეთ მაქსიმალური მოგება, თუ მთლიანი დანახარჯია  $(TC) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$ .

პასუხი: 17500

10.4–10.5 ფირმა აწარმოებს ორი სახის პროდუქციას. თითოეულზე მოთხოვნის ფუნქციაა  $P_1 = 120 - 2Q_1$  და  $P_2 = 90 - Q_2$ . იპოვეთ მაქსიმალური მოგება, თუ მთლიანი დანახარჯია  $(TC) = 30 + 20(Q_1 + Q_2)$ .

პასუხი: 2445

## 11. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

11.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int (\frac{1}{2x} + e^{3x} + 6x^2) dx$

a)  $\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + 2x^3 + C$       b)  $2 \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + 2x^3 + C$

c)  $\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + x^3 + C$       d)  $\frac{1}{2} \ln|x| + 3e^{3x} + 2x^3 + C$

11.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + 7^{\frac{x}{2}} - 11) dx$

a)  $8\sqrt{x} + 2 \cdot 7^{\frac{x}{2}} \ln 7 - 11x + C$       b)  $8\sqrt{x} + \frac{2}{\ln 7} \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$

c)  $2\sqrt{x} + \frac{2}{\ln 7} \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$       d)  $8\sqrt{x} + 2 \ln 7 \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$

11.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int (\frac{2}{x^2} + e^{8x} + 1) dx$

a)  $-\frac{2}{x} + 8e^{8x} + x + C$       b)  $-\frac{4}{x} + 8e^{8x} + x + C$

c)  $-\frac{2}{x} + \frac{1}{8} e^{8x} + x + C$       d)  $-\frac{4}{x} + \frac{1}{8} e^{8x} + x + C$

11.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{(2 - \sqrt{x})^2}{x} dx$

a)  $\ln|x| + 8\sqrt{x} + x + C$       b)  $4 \ln|x| - 2\sqrt{x} + x + C$

c)  $2 \ln|x| - 4\sqrt{x} + 2x + C$       d)  $4 \ln|x| - 8\sqrt{x} + x + C$

11.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})^2 dx$

a)  $\frac{1}{x} - 2x + \frac{x^2}{2} + C$       b)  $\ln x + 2x + \frac{x^2}{4} + C$

c)  $\ln x - 2x + \frac{x^2}{2} + C$       d)  $2 \ln x + 2x + \frac{x^2}{2} + C$



12. განუსაზღვრელი ინტეგრალი  
(ჩასმის წესი)

12.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \sqrt{11-6x} dx$

a)  $\frac{1}{6}\sqrt{(11-6x)^3} + C$

b)  $-\frac{2}{3}\sqrt{(11-6x)^3} + C$

c)  $\frac{1}{9}\sqrt{(11-6x)^3} + C$

d)  $-\frac{1}{9}\sqrt{(11-6x)^3} + C$

12.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{9+8x}} dx$

a)  $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$

b)  $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(9+8x)} + C$

c)  $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$

d)  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$

12.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{x}{\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}} dx$

a)  $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} + C$

b)  $\frac{5}{9}\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} + C$

c)  $-\frac{5}{6}\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} + C$

d)  $\frac{5}{9}\sqrt[5]{(1+3x^2)^4} + C$

12.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{1}{12x+5} dx$

a)  $\frac{1}{5}\ln|12x+5| + C$

b)  $\frac{1}{12}\ln|12x+5| + C$

c)  $\frac{1}{5}(12x+5)^{-2} + C$

d)  $\frac{1}{12}(12x+5)^{-2} + C$

12.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{1}{(3x+1)^6} dx$

a)  $-\frac{1}{21}(3x+1)^{-7} + C$

b)  $\frac{1}{18}(3x+1)^{-5} + C$

c)  $-\frac{1}{15}(3x+1)^{-5} + C$

d)  $-\frac{1}{15}(3x+1)^{-7} + C$

13. განუსაზღვრელი ინტეგრალი  
(ნაწილობითი ინტეგრების წესი)

13.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int x 3^x dx$

- a)  $\frac{x^2}{2} \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$                       b)  $x \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$   
c)  $x \frac{3^x}{\ln^2 3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$                       d)  $\frac{x^2}{2} \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

13.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \frac{1}{x^3} \ln x dx$

- a)  $-\frac{1}{4x^2} \ln x + \frac{1}{2x^2} + C$                       b)  $-\frac{1}{3x^2} \ln x + \frac{1}{2x^2} + C$   
c)  $-\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C$                       d)  $-\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{4x^2} + C$

13.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int x e^{3x} dx$

- a)  $\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{6} e^{3x} + C$                       b)  $3x e^{3x} - 9e^{3x} + C$   
c)  $\frac{x^2}{6} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$                       d)  $\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$

13.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \log_8 x dx$

- a)  $x \log_8 x - \frac{x}{\ln 8} + C$                       b)  $x \log_8 x - x \ln 8 + C$   
c)  $-x \log_8 x + \frac{x}{\ln 8} + C$                       d)  $-x \log_8 x - x \ln 8 + C$

13.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

- a)  $\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$                       b)  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$   
c)  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$                       d)  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{2}{9} \sqrt{x} + C$

## 14. განსაზღვრული ინტეგრალი

14.1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_0^{1/4} (4x-1)^4 dx$ . პასუხი: 0,05

14.2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_e^{e^2} \frac{10dx}{x \ln^3 x}$ . პასუხი: 3,75

14.3. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_{-3}^0 6\sqrt{x+4} dx$ . პასუხი: 28

14.4. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(8x+1)}}$ . პასუხი: 0,5

14.5. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_1^3 \frac{dx}{(2x-1)^3}$ . პასუხი: 0,24

## 15. პირველადი ფუნქცია

15.1. მარგინალური დანახარჯია  $(MC) = 0.6Q^2 + 4,6Q + 14$ , ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი არის 200 დოლარი. გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 20 ერთეულის წარმოებას.

- a) 3000      b) 3240      c) 3160      d) 2860

15.2. მარგინალური დანახარჯია  $(MC) = 0.3Q^2 + 8Q + 20$ . გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 10 ერთეულის წარმოებას, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის წარმოებაზე იხარჯება 224,1 დოლარი.

- a) 880      b) 900      c) 930      d) 870

15.3. იპოვეთ  $(TC)$  მთლიანი დანახარჯი, თუ მარგინალური დანახარჯია  $(MC) = 6e^{0.3Q}$ , ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი 30 ერთეულია.

a)  $(TC) = 10e^{0.3Q} + 20$                       b)  $(TC) = 5e^{0.3Q} + 25$

c)  $(TC) = 20e^{0.3Q} + 10$                       d)  $(TC) = 15e^{0.3Q} + 15$

15.4. იპოვეთ  $(TR)$  მთლიანი ამონაგების ფუნქცია, თუ მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა  $(MR) = \frac{12}{\sqrt{Q+9}}$ .

a)  $(TR) = 6(\sqrt{Q+9} - 2)$                       b)  $(TR) = 24(\sqrt{Q+9} - 3)$

c)  $(TR) = 12(\sqrt{Q+9} - 1)$                       d)  $(TR) = 18(\sqrt{Q+9} - 2)$

15.5. იპოვეთ  $P = f_D(Q)$  მოთხოვნის ფუნქცია, თუ მარგინალური ამონაგების ფუნქციაა  $(MR) = \frac{12}{\sqrt{Q+9}}$ .

a)  $P = \frac{24}{\sqrt{Q+9} + 3}$

b)  $P = \frac{12\sqrt{Q+9} - 36}{Q}$

c)  $P = \frac{12}{\sqrt{Q+9} + 6}$

d)  $P = \frac{24(\sqrt{Q+9} - 72)}{Q}$

**16. განსაზღვრული ინტეგრალი**  
(ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა)

16.1–16.2 გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:  $y = 5x^2 + x$  და  $y = -2x^2 + 8x$  (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 1,2

16.3. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:  $y = x^2 - 4x$  და  $y = 2x$  (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 36

16.4. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:  $y = 2x^2 + x$  და  $y = x + 8$  (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 21,3

16.5. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:  $y = 2x^2 - 6$  და  $y = 2x - 6$  (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 0,3