

მათემატიკა ეკონომიკასა და ბიზნესში 2

(მათემატიკა ეკონომისტებისათვის 2)

ფინალური გამოცდის ნიმუში

40 ქულა

(40 ქულა = 16x2,5ქულა)

ზურაბ თედიაშვილი

თეორიული საკითხების ჩამონათვალი

ფუნქციის უწყვეტობა, ფუნქციის წყვეტა და წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია; ფუნქციის წარმოებული, წარმოებულის გამოთვლის წესები, ძირითადი წარმოებულების ცხრილი, რთული ფუნქციის წარმოებული, მარგინალური ფუნქციები; ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების დადგენა წარმოებულის გამოყენებით; ფუნქციის ექსტრემუმი, ექსტრემუმის დადგენის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ფუნქციის უდიდესი(უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე; ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები; მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულები; მოთხოვნის ფუნქციის კერძო ელასტიკურობები; ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი; პირველადი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი; განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები და ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი; განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის წესები – უშუალო ინტეგრების წესი, ჩასმის წესი და ნაწილობითი ინტეგრების წესი; განსაზღვრული ინტეგრალი და მისი ძირითადი თვისებები; ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულა; განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის წესები – უშუალო ინტეგრების წესი, ჩასმის წესი და ნაწილობითი ინტეგრების წესი; ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.

შენიშვნა: ყველა ლიადაბოლოებიანი საკითხის პასუხი სტუდენტმა უნდა ჩაწეროს ათწილადი რიცხვის სახით; ასეთი რიცხვის კომპიუტერში ჩასაწერად მბიშმის ნაცვლად გამოიყენეთ წერტილი და საჭიროების შემთხვევაში რიცხვის დამრგვალება განახორციელოთ ტექსტში მითითებულ თანრიგამდე.

1. ფუნქციის უწყვეტობა, წყვეტა და წყვეტის წერტილები

1.1. მოცემულია $f(x) = \frac{\sqrt{5x-x}}{x-5}$ ფუნქცია.

- a) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის აცილებადი ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)
- b) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის ნახტომის ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)
- c) $x_0 = 5$ წერტილი არის f ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილი
- d) $x_0 = 5$ წერტილში f ფუნქცია არის უწყვეტი

1.2. იპოვეთ $f(x) = \frac{x^3-x}{(x+1)(x-7)}$ ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილები.

- a) $x \in \emptyset$
- b) $x = 7$
- c) $x = -1$ და $x = 7$
- d) $x = -1$

1.3. რამდენი წყვეტის წერტილი აქვს $f(x) = \begin{cases} \frac{16}{x+6} - 3^x, & x \leq 2 \\ 3e^{x-2} - \frac{20}{x}, & x > 2 \end{cases}$ ფუნქციას ?

- a) 0
- b) 3
- c) 1
- d) 2

1.4. მოცემულია f ფუნქცია, რომლისთვისაც $f(x_0-) = -8$ და $f(x_0+) = 8$. მაშინ:

- a) x_0 წერტილი არის f ფუნქციის აცილებადი ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)
- b) x_0 წერტილი არის f ფუნქციის ნახტომის ტიპის წყვეტის წერტილი (I გვარის წყვეტის წერტილი)
- c) x_0 წერტილში f ფუნქცია არის უწყვეტი
- d) x_0 წერტილი არის f ფუნქციის II გვარის წყვეტის წერტილი

1.5. იპოვეთ a პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x}{25-x^2}, & x \neq -5 \\ 4a-3, & x = -5 \end{cases}$ ფუნქცია არის უწყვეტი $x_0 = -5$ წერტილში.

- a) 5/8
- b) 1/8
- c) 5/6
- d) 7/6

4.5. მთლიანი დანახარჯის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$(TC) = 2Q^3 - 21Q^2 + 36Q + 425, \text{ სადაც } Q \text{ პროდუქციის მოცულობაა.}$$

იპოვეთ წარმოების მინიმალური დანახარჯი.

a) 317

b) 326

c) 348

d) 305

5. ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე

5.1–5.3 იპოვეთ $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[0; 3]$ სეგმენტზე. პასუხი: 17

5.4–5.5 იპოვეთ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[-1; 2]$ სეგმენტზე. პასუხი: -11

6. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

6.1. იპოვეთ $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტის

OX ღერძთან თანაკვეთის აბსცისა. პასუხი: 4,4

6.2. იპოვეთ $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტის

OY ღერძთან თანაკვეთის ორდინატა. პასუხი: -22

6.3. იპოვეთ $f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x + 4}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების თანაკვეთის

ორდინატა. პასუხი: -42

6.4. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 24x} - 6x$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია $y = kx + b$
წრფე, როცა $x \rightarrow +\infty$. იპოვეთ k . პასუხი: -4

6.5. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 24x} - 6x$ ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტია $y = -4x + b$
წრფე, როცა $x \rightarrow +\infty$. იპოვეთ b . პასუხი: 6

7. ფუნქციის კერძო წარმოებულები

- 7.1. იპოვეთ $f'_x(-2;1)$, თუ $f(x, y) = (y^2 - 2)e^{4x^2 + 7x - 2}$. პასუხი: 9
- 7.2. იპოვეთ $f'_y(-3;2)$, თუ $f(x, y) = (3 - x^2)\ln(2 + y^2)$. პასუხი: -4
- 7.3. იპოვეთ $f'_y(-3;1)$, თუ $f(x, y) = \frac{2x^2 - 16}{x + 4y}$. პასუხი: -8
- 7.4. იპოვეთ $f'_x(1;0)$, თუ $f(x, y) = \frac{2y^3 + 10}{3x - e^y}$. პასუხი: $-7,5$
- 7.5. იპოვეთ $f'_y(1;-1)$, თუ $f(x, y) = 24\sqrt{3x^4 y^2 + y^2 + 12}$. პასუხი: -24

8. ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები

- 8.1. იპოვეთ $f''_{xx}(1;-1)$, თუ $f(x, y) = 45\ln(2x^2 + y^2)$. პასუხი: -20
- 8.2. იპოვეთ $f''_{yy}(2;-1)$, თუ $f(x, y) = \ln(x^4 + 3xy)$. პასუხი: $-0,36$
- 8.3–8.4 იპოვეთ $f''_{yx}(4;-2)$, თუ $f(x, y) = \frac{5 - 4x}{9 + 3y - y^2}$. პასუხი: 28
- 8.5. იპოვეთ $f''_{xy}(-2;4)$, თუ $f(x, y) = \frac{3 - 24y}{10 + 3x - 2x^2}$. პასუხი: $16,5$

9. მოთხოვნის ფუნქციის კერძო ელასტიკურობები

9.1–9.2 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q = f(P, P_A, Y) = 3000 - 4P^2 + 10P_A - 0,01Y^2$.

გამოთვალეთ E_P , თუ $P = 15, P_A = 30, Y = 200$. პასუხი: 0,9

9.3 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q = f(P, P_A, Y) = 3000 - 4P^2 + 10P_A - 0,01Y^2$.

გამოთვალეთ E_Y , თუ $P = 15, P_A = 30, Y = 200$. პასუხი: 0,4

9.4–9.5 მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q = f(P, P_A, Y) = 2400 - 20P + 4P_A^2 - 0,01Y^2$.

გამოთვალეთ E_{P_A} , თუ $P = 25, P_A = 15, Y = 200$. პასუხი: 0,75

10. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი

10.1–10.3 ფირმა აწარმოებს ორი სახის საქონელს. პირველი საქონლის ერთეულის ფასია $P_1 = 200$, ხოლო მეორის – $P_2 = 250$. იპოვეთ მაქსიმალური მოგება, თუ მთლიანი დანახარჯია $(TC) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$.

პასუხი: 17500

10.4–10.5 ფირმა აწარმოებს ორი სახის პროდუქციას. თითოეულზე მოთხოვნის ფუნქციაა $P_1 = 120 - 2Q_1$ და $P_2 = 90 - Q_2$. იპოვეთ მაქსიმალური მოგება, თუ მთლიანი დანახარჯია $(TC) = 30 + 20(Q_1 + Q_2)$.

პასუხი: 2445

11. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

11.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int (\frac{1}{2x} + e^{3x} + 6x^2) dx$

a) $\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + 2x^3 + C$ b) $2 \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + 2x^3 + C$

c) $\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{3} e^{3x} + x^3 + C$ d) $\frac{1}{2} \ln|x| + 3e^{3x} + 2x^3 + C$

11.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + 7^{\frac{x}{2}} - 11) dx$

a) $8\sqrt{x} + 2 \cdot 7^{\frac{x}{2}} \ln 7 - 11x + C$ b) $8\sqrt{x} + \frac{2}{\ln 7} \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$

c) $2\sqrt{x} + \frac{2}{\ln 7} \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$ d) $8\sqrt{x} + 2 \ln 7 \cdot 7^{\frac{x}{2}} - 11x + C$

11.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int (\frac{2}{x^2} + e^{8x} + 1) dx$

a) $-\frac{2}{x} + 8e^{8x} + x + C$ b) $-\frac{4}{x} + 8e^{8x} + x + C$

c) $-\frac{2}{x} + \frac{1}{8} e^{8x} + x + C$ d) $-\frac{4}{x} + \frac{1}{8} e^{8x} + x + C$

11.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{(2-\sqrt{x})^2}{x} dx$

a) $\ln|x| + 8\sqrt{x} + x + C$ b) $4 \ln|x| - 2\sqrt{x} + x + C$

c) $2 \ln|x| - 4\sqrt{x} + 2x + C$ d) $4 \ln|x| - 8\sqrt{x} + x + C$

11.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})^2 dx$

a) $\frac{1}{x} - 2x + \frac{x^2}{2} + C$ b) $\ln x + 2x + \frac{x^2}{4} + C$

c) $\ln x - 2x + \frac{x^2}{2} + C$ d) $2 \ln x + 2x + \frac{x^2}{2} + C$

12. განუსაზღვრელი ინტეგრალი
(ჩასმის წესი)

12.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \sqrt{11-6x} dx$

- a) $\frac{1}{6}\sqrt{(11-6x)^3} + C$ b) $-\frac{2}{3}\sqrt{(11-6x)^3} + C$
c) $\frac{1}{9}\sqrt{(11-6x)^3} + C$ d) $-\frac{1}{9}\sqrt{(11-6x)^3} + C$

12.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{1}{\sqrt[3]{9+8x}} dx$

- a) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$ b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(9+8x)} + C$
c) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$ d) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(9+8x)^2} + C$

12.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{x}{\sqrt[5]{1+3x^2}} dx$

- a) $\frac{5}{24}\sqrt[5]{(1+3x^2)^4} + C$ b) $\frac{5}{9}\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} + C$
c) $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(1+3x^2)^3} + C$ d) $\frac{5}{9}\sqrt[5]{(1+3x^2)^4} + C$

12.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{1}{12x+5} dx$

- a) $\frac{1}{5}\ln|12x+5| + C$ b) $\frac{1}{12}\ln|12x+5| + C$
c) $\frac{1}{5}(12x+5)^{-2} + C$ d) $\frac{1}{12}(12x+5)^{-2} + C$

12.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{1}{(3x+1)^6} dx$

- a) $-\frac{1}{21}(3x+1)^{-7} + C$ b) $\frac{1}{18}(3x+1)^{-5} + C$
c) $-\frac{1}{15}(3x+1)^{-5} + C$ d) $-\frac{1}{15}(3x+1)^{-7} + C$

13. განუსაზღვრელი ინტეგრალი
(ნაწილობითი ინტეგრების წესი)

13.1. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int x 3^x dx$

- a) $\frac{x^2}{2} \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$ b) $x \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$
c) $x \frac{3^x}{\ln^2 3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ d) $\frac{x^2}{2} \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

13.2. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \frac{1}{x^3} \ln x dx$

- a) $-\frac{1}{4x^2} \ln x + \frac{1}{2x^2} + C$ b) $-\frac{1}{3x^2} \ln x + \frac{1}{2x^2} + C$
c) $-\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C$ d) $-\frac{1}{2x^2} \ln x + \frac{1}{4x^2} + C$

13.3. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int x e^{3x} dx$

- a) $\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{6} e^{3x} + C$ b) $3x e^{3x} - 9e^{3x} + C$
c) $\frac{x^2}{6} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$ d) $\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$

13.4. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \log_8 x dx$

- a) $x \log_8 x - \frac{x}{\ln 8} + C$ b) $x \log_8 x - x \ln 8 + C$
c) $-x \log_8 x + \frac{x}{\ln 8} + C$ d) $-x \log_8 x - x \ln 8 + C$

13.5. იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი $\int \sqrt{x} \ln x dx$

- a) $\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$ b) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{3} \sqrt{x^3} + C$
c) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$ d) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{2}{9} \sqrt{x} + C$

14. განსაზღვრული ინტეგრალი

- 14.1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_0^{1/4} (4x-1)^4 dx$. პასუხი: 0,05
- 14.2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_e^{e^2} \frac{10dx}{x \ln^3 x}$. პასუხი: 3,75
- 14.3. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_{-3}^0 6\sqrt{x+4} dx$. პასუხი: 28
- 14.4. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8x+1}}$. პასუხი: 0,5
- 14.5. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_1^3 \frac{dx}{(2x-1)^3}$. პასუხი: 0,24

15. პირველადი ფუნქცია

- 15.1. მარგინალური დანახარჯია $(MC) = 0.6Q^2 + 4,6Q + 14$, ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი არის 200 დოლარი. გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 20 ერთეულის წარმოებას.
- a) 3000 b) 3240 c) 3160 d) 2860
- 15.2. მარგინალური დანახარჯია $(MC) = 0.3Q^2 + 8Q + 20$. გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 10 ერთეულის წარმოებას, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის წარმოებაზე იხარჯება 224,1 დოლარი.
- a) 880 b) 900 c) 930 d) 870

15.3. იპოვეთ (TC) მთლიანი დანახარჯი, თუ მარგინალური დანახარჯია $(MC) = 6e^{0.3Q}$, ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი 30 ერთეულია.

a) $(TC) = 10e^{0.3Q} + 20$ b) $(TC) = 5e^{0.3Q} + 25$

c) $(TC) = 20e^{0.3Q} + 10$ d) $(TC) = 15e^{0.3Q} + 15$

15.4. იპოვეთ (TR) მთლიანი ამონაგების ფუნქცია, თუ მარგინალური

ამონაგების ფუნქციაა $(MR) = \frac{12}{\sqrt{Q+9}}$.

a) $(TR) = 6(\sqrt{Q+9} - 2)$ b) $(TR) = 24(\sqrt{Q+9} - 3)$

c) $(TR) = 12(\sqrt{Q+9} - 1)$ d) $(TR) = 18(\sqrt{Q+9} - 2)$

15.5. იპოვეთ $P = f_D(Q)$ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ მარგინალური

ამონაგების ფუნქციაა $(MR) = \frac{12}{\sqrt{Q+9}}$.

a) $P = \frac{24(\sqrt{Q+9} - 3)}{Q}$ b) $P = \frac{12\sqrt{Q+9} - 36}{Q}$

c) $P = \frac{12}{\sqrt{Q+9} + 6}$ d) $P = \frac{24(\sqrt{Q+9} - 2)}{Q}$

16. განსაზღვრული ინტეგრალი

(ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა)

16.1–16.2 გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია

შემდეგი წირებით: $y = 5x^2 + x$ და $y = -2x^2 + 8x$ (პასუხი დაამრგვალეთ

მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 1,2

16.3. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით: $y = x^2 - 4x$ და $y = 2x$ (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 36

16.4. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით: $y = 2x^2 + x$ და $y = x + 8$ (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 21,3

16.5. გამოთვალეთ ფართობი იმ ფიგურისა, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით: $y = 2x^2 - 6$ და $y = 2x - 6$ (პასუხი დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით და ჩაწერეთ ათწილადი რიცხვის სახით).

პასუხი: 0,3