

მათემატიკა ეკონომიკასა და ბიზნესში 1

(მათემატიკა ეკონომისტებისათვის 1)

ფინალური გამოცდა

40 ქულა

(40 ქულა = 8x2ქულა + 8x3ქულა,

სულ 16 საკითხი)

თეორიული საკითხების ჩამონათვალი

მოთხოვნისა და მიწოდების წრფივი ფუნქციები, წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე; ხარისხები და ლოგარითმები; პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლებები, წრფივი უტოლობები, წრფივი სისტემები, წრფივი ფუნქციები; მატრიცები, მატრიცების ტოლობა, ერთეულოვანი მატრიცა, მარტიცათა შეკრება-გამოკლება; მატრიცის რიცხვზე გამრავლება; მატრიცათა ნამრავლი; ტრანსპონირებული მატრიცა. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები; მინორი, ალგებრული დამატება, მიკავშირებული და ტრანსპონირებული მატრიცები; შებრუნებული მატრიცა; წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები და მათი ამოხსნა კრამერის წესით; სარგებლის მარტივი განაკვეთი; სარგებლის რთული განაკვეთი; სარგებლის ნომინალური განაკვეთები; ეკვივალენტური განაკვეთები; ვალის დაფარვის გეგმა, ანუიტეტი, ინვესტიციების შეფასება-შედარება; რიცხვითი მიმდევრობები; რიცხვითი მიმდევრობის მოცემის წესები, მონოტონური მიმდევრობა, შემოსაზღვრული მიმდევრობა; მიმდევრობის ზღვარი; კრებადი მიმდევრობის თვისებები; ეილერის რიცხვი; უწყვეტი დარიცხვა; რიცხვითი მწკრივი და მისი ჯამი; რიცხვითი მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები; შედარების ნიშანი; დალამბერისა და კოშის ნიშნები.

ნ ი მ უ შ ი

1. მოთხოვნა – მიწოდება (2 ქულა)

- ა) მოთხოვნის წრფივი ფუნქციაა $P = f_D(Q) = aQ + b$, სადაც a და b გარკვეული პარამეტრებია (რიცხვებია). იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ ფასი იცვლება $[0; 120]$ შუალედში, ხოლო მოთხოვნა იცვლება $[0; 20]$ შუალედში. პასუხი: -6

ან

- ბ) მიწოდების (არაცხადი სახის) ფუნქციაა $3P - 5Q - 840 = 0$. რამდენი ერთეულით გაიზრდება მიწოდება ფასის 10 ერთეულით გაზრდის შემთხვევაში? პასუხი: 6

ან

- გ) იპოვეთ a პარამეტრის უდიდესი მთელი მნიშვნელობა, თუ $P = f_S(Q) = (1+a)(4-a)Q + (290-110a)$ მიწოდების წრფივი ფუნქციაა. პასუხი: 2

2. მოთხოვნა – მიწოდება, წონასწორობა (3 ქულა)

- ა) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = aQ + 60$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $P = f_S(Q) = (5+a)Q + 10$. იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ წონასწორობის ფასია 30 ერთეული. პასუხი: -3

ან

- ბ) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -5Q + 150$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა

$P = \frac{1}{2}Q + 40$. იპოვეთ ახალი წონასწორობის სიდიდე, თუ პროდუქციის

ყოველ გაყიდულ ერთეულზე დაწესდა გადასახადი (ბეგარა) ფასის

10 %-ის ოდენობით.

პასუხი: 19

ან

გ) მოთხოვნის ფუნქციაა $P = -4Q + 120$, ხოლო მიწოდების ფუნქცია

$P = 0,5Q + 30$. მთავრობამ დააწესა ფიქსირებული გადასახადი პროდუქციის

ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. იპოვეთ დაწესებული გადასახადის

სიდიდე, თუ ახალი წონასწორობის ფასია 48 დოლარი. პასუხი: 9

3. მატრიცები, წრფივი მოქმედებები მატრიცებზე (2 ქულა)

ა) გამოთვალეთ $a - b$, თუ $\begin{bmatrix} a-4 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 0 & b-8 & 5 \end{bmatrix}$. პასუხი: 6

ან

ბ) იპოვეთ $C = 4A - 3B^T$ მატრიცის მეორე სტრიქონის ელემენტების

ჯამი, თუ $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ და $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$. პასუხი: 16

ან

გ) იპოვეთ x და y რიცხვების ჯამი, თუ $\begin{pmatrix} 5x + 11 & 0 \\ 7x + 14 & 6y - 11 \end{pmatrix}$

ერთეულოვანი მატრიცაა.

პასუხი: 0

4. მატრიცების გამრავლება, შებრუნებული მატრიცა (3 ქულა)

- ა) იპოვეთ ჯამი C მატრიცის იმ c_{ij} ელემენტებისა, რომელთათვისაც $i \neq j$,

თუ $C = AB$ და $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. პასუხი: 7

ან

- ბ) იპოვეთ $10 A^{-1} - A^T$ მატრიცის უდიდესი ელემენტი, თუ $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

პასუხი: 3

ან

- გ) იპოვეთ X მატრიცის უმცირესი ელემენტი, თუ

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{პასუხი: } -23$$

5. დეტერმინანტი, მინორი, ალგებრული დამატება (2 ქულა)

- ა) იპოვეთ x, თუ $\begin{vmatrix} 2x & -2 & 1 \\ 4 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$. პასუხი: 4

ან

- ბ) იპოვეთ A_{32} , თუ $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. პასუხი: -2

ან

- გ) იპოვეთ $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ მატრიცის მიკავშირებული მატრიცის

ელემენტების ჯამი.

პასუხი: -27

6. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები (3 ქულა)

ა) m პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს
$$\begin{cases} -2x + 3y - mz = 2 \\ x - 2z = -1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსნი? პასუხი: $-5,5$

ან

ბ) იპოვეთ x_2^2 , თუ
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$
 . პასუხი: 4

ან

- გ) სამი რიცხვის ჯამია 3. თუ გაოთხეცეხულ პირველ რიცხვს დავუმატებთ გასამკეცეხულ მესამე რიცხვს, ვღებულობთ 15-ს. თუ გახუთკეცეხულ მეორე რიცხვს გამოვაკლებთ მესამე რიცხვს, მივიღებთ 3-ს. გამოთვალეთ პირველი რიცხვი. პასუხი: 6

7. სარგებლის მარტივი განაკვეთი (2 ქულა)

- ა) სარგებლის მარტივი 6%-იანი განაკვეთით აღებული სესხი 2 წელიწადში გახდა 3400 დოლარი. იპოვეთ დისკონტირებული თანხა, თუ დარიცხვა ხდება ყოველ 4 თვეში ერთხელ. პასუხი: 2500

ან

- ბ) 2500 დოლარი აღებულია სესხად სარგებლის წლიური მარტივი

5 %-იანი განაკვეთით. რა თანხა უნდა დააბრუნოს მოვალემ 150 დღეში, თუ დარიცხვა ხდება ყოველდღიურად? პასუხი: 2551

ან

- გ) რამდენ თვეში გაორმაგდება სარგებლის მარტივი 12,5 %-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა, თუ და რიცხვა ხდება ყოველთვიურად? პასუხი: 8

8. სარგებლის რთული განაკვეთი (2 ქულა)

- ა) ბანკში დაბანდებულია 10000 დოლარი სარგებლის წლიური რთული 7,5 %-იანი განაკვეთით. რა თანხას დაუბრუნებს ბანკი მეანაბრეს 6 წლის ბოლოს (პასუხი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე)?

პასუხი: 15433

ან

- ბ) ბანკში სარგებლის წლიური რთული 6,4 %-იანი განაკვეთით დაბანდებული თანხა 5 წელში გახდა 4773 დოლარი. რა თანხა დაუბანდება მეანაბრეს (პასუხი დაამრგვალეთ მთელ რიცხვამდე)?

პასუხი: 3500

ან

- გ) საქონლის თავდაპირველი გასაყიდი ფასია 18000 დოლარი. 3 წლის შემდეგ მისი ფასი გახდა 9600 დოლარი. როგორი წლიური რთული

საპროცენტო განაკვეთით ხდება ჩამოფასება (პასუხი დაამრგვალოთ მეთედამდე) ? პასუხი: 18,9

**9. სარგებლის ნომინალური წლიური
რთული განაკვეთი (3 ქულა)**

ა) 2000 დოლარი აღებულია სესხად 2 წლით სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 5 %-იანი განაკვეთით, კვარტალური დარიცხვით. გამოთვალეთ გადასახდელი თანხის რაოდენობა.

- a) 2209 b) 2210 c) 2108 d) 2190

ან

ბ) რამდენ წელიწადში გახუთმაგდება სარგებლის ნომინალური წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით დაბანდებული K თანხა, თუ დარიცხვა ხდება ყოველთვიურად ?

- a) $\frac{K \lg 5}{\lg(1+r/1200)}$ b) $\frac{\lg 5}{12K \lg(1+r/100)}$
c) $\frac{\lg 5}{12 \lg(1+r/1200)}$ d) $\frac{\lg 5}{\lg(1+12r/100)}$

ან

გ) 5000 დოლარი დაბანდებულია სარგებლის ნომინალური წლიური რთული 6 %-იანი განაკვეთით, უწყვეტი დარიცხვით. რა თანხა დაუგროვდება მენახბრეს 4 წელიწადში ?

- a) 6412 b) 6524 c) 6432 d) 6356

10. ეკვივალენტური განაკვეთები (3 ქულა)

ა) სარგებლის წლიური რთული 9 %-იანი განაკვეთის ეკვივალენტური კვარტალური რთული განაკვეთია

- a) 2,31 b) 2,03 c) 2,23 d) 2,18

ან

ბ) სარგებლის როგორი ეკვივალენტური წლიური რთული განაკვეთი შეესაბამება სარგებლის ნომინალურ წლიურ რთულ 17 %-იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში ?

- a) 18,53 b) 18,25 c) 17,75 d) 18,15

ან

გ) n წელიწადში r %-იანი რთული განაკვეთის ეკვივალენტური წლიური მარტივი განაკვეთია

- a) $\left(\sqrt[n]{1 + \frac{r}{100}} - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$ b) $\left(\sqrt[n]{1 - \frac{r}{100}} + 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$
c) $\left(\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$ d) $\left(\left(1 - \frac{r}{100} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{100}{n}$

11. ვალის დაფარვის გეგმა, ანუიტეტი, ინვესტიციების შეფასება–შედარების კრიტერიუმები (3 ქულა)

ა) (ამოცანა ვალის დაფარვაზე ან ანუიტეტის საწყის თანხაზე) იპოვეთ ყოველწლიური გადასახადის სიდიდე 100 000 დოლარი ვალისათვის, რომელიც აღებულია 25 წლით სარგებლის წლიური

რთული 8 %-იანი განაკვეთით.

- a) 9368 b) 9218 c) 9821 d) 9456

ან

- ბ) საინვესტიციო პროექტი მოითხოვს 15000 დოლარის ინვესტირებას და გარანტიას იძლევა, რომ 3 წელიწადში ინვესტორს დაუბრუნებს 20000 დოლარს. გამოთვალეთ (NPV) (ან (IRR)), თუ საფინანსო ბაზრის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთია 5 %.

- a) 2249 b) 2135 c) 2277 d) 2387

ან

- გ) იურიდიულ პირს ყოველი წლის დასაწყისში ბანკში შეაქვს K დოლარი სარგებლის წლიური რთული r %-იანი განაკვეთით. რა თანხა დგროვდება მის ანგარიშზე n წელიწადში ?

- a) $\frac{K}{q} \frac{q-1}{q^n-1}$ b) $K q^n \frac{q-1}{q^n-1}$ c) $K q \frac{q^n-1}{q-1}$ d) $\frac{K}{q} \frac{q^n-1}{q-1}$

შენიშვნა: $q = 1 + r/100$

12. რიცხვითი მიმდევრობები (2 ქულა)

- ა) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ მიმდევრობის ზოგადი წევრია

- a) $a_n = (-1)^{n+2} \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = (-1)^{n+4} \frac{n}{2n-1}$
c) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$ d) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

ან

- ბ) მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = \frac{1}{3n^2+1}$. ეს მიმდევრობა

- a) შემოსაზღვრულია და კლებადია

- b) შემოსაზღვრულია ზემოდან და ზრდადია
- c) შემოსაზღვრულია ქვემოდან და ზრდადია
- d) არაა შემოსაზღვრული და მონოტონურია

ან

გ) მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_1 = -1$, $a_2 = 2$ და

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} + 4a_n, \quad n \geq 1. \quad \text{ამ მიმდევრობის მეოთხე წევრია}$$

- a) 32
- b) 15
- c) 38
- d) 46

13. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი (2 ქულა)

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 2n}{n - 1} = ?$

- a) 4
- b) 1
- c) 3
- d) -2

ან

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^n}{7 \cdot 3^n + 5^{n+1}} = ?$

- a) 7/3
- b) 3/5
- c) 2/3
- d) 1/5

ან

გ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+4)! + (n+2)!} = ?$

- a) 1
- b) 1/2
- c) 0
- d) ∞

14. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარი (3 ქულა)

ა) $\lim_{n \rightarrow \infty} 24 \cdot \left(\frac{3+6+\dots+3n}{6n+8} - \frac{n}{4} \right) = ?$ (ან $\lim_{n \rightarrow \infty} 18 \cdot \frac{1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}} = ?$)

- a) 5 b) 4 c) -2 d) -3

ან

ბ) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}) = ?$ (ან $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+7}{n^2+5} \right)^{n^2+1} = ?$)

- a) 2 b) 1/2 c) 1/3 d) 1

ან

გ) რიცხვითი მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით: $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 6} - 1, \quad n \geq 1. \text{ მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით}$$

მტკიცდება, რომ ეს მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, რის გამოც იგი კრებადია. იპოვეთ ამ მიმდევრობის ზღვარი.

- a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{6}$

15. რიცხვითი მწკრივები (2 ქულა)

ა) იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$ მწკრივის ჯამი

- a) 7/12 b) 5/12 c) 3/4 d) 3/10

ან

ბ) იპოვეთ მწკრივის ჯამი, თუ ამ მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობაა

$$S_n = 16 \left(\frac{5n+1}{8n+3} - \frac{3n-2}{4n+5} \right).$$

- a) 3 b) -3/10 c) -2 d) 3/5

ახ

გ) ცნობილია, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ კრებადი მწკრივებია, მაშინ

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ მწკრივი კრებადია b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2$ მწკრივი განშლადია

ც) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ მწკრივი კრებადია d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ მწკრივი განშლადია

16. რიცხვითი მწკრივები (3 ქულა)

ა) იპოვეთ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ მწკრივის ჯამი.

- a) 5/12 b) 7/12 c) 3/4 d) 1/6

ახ

ბ) გამოთვალეთ დალამბერის ნიშანში მითითებული q შემდეგი

$$\text{მწკრივისათვის } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2 4^{n+1}}.$$

- a) $q = 5/2$ b) $q = 4/5$ c) $q = 2/5$ d) $q = 5/4$

ახ

გ) გამოთვალეთ კოშის ნიშანში მითითებული q შემდეგი

$$\text{მწკრივისათვის } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

- a) 1/4 e b) e/4 c) 4/e d) 4 e